(*) Συνιστάται για τον ευζωο!

Απειροστικός Λογισμός III   3/10/2016

1ο Μάθημα

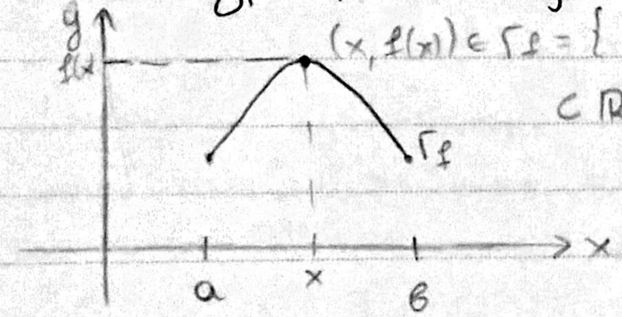
Βιβλιογραφία:

1) Σημειώσεις δικές μας, εδώ στο μάθημα
2) «Σημειώσεις» Γ.Γ. → ιστοσελίδα μαθήματος
(*) 3) Marsden - Tromba, Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε. Κρήτης

παρατηρήσεις:

Το 2) είναι περισσότερο «βιβλίο» υπό την έννοια ότι περιέχει πολύ περισσότερα από αυτά που θα κάνουμε εδώ στο μάθημα και, ειδικότερα, τους αυστηρούς ορισμούς όλων όσων περιέχει και το 3) και (σε μεγάλο βαθμό) τις αυστηρές αποδείξεις.

⇒ Τι είναι γράφημα της f;



$(x, f(x)) \in \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$ ως γράφημα της $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Ερώτηση:

Ποιο είναι το αντικείμενο του Απειροστικού Λογισμού III κ' IV;

απάντηση:

Η μελέτη συναρτήσεων που έχουν είτε ως ορίσμα $\bar{x} = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ είτε ως τιμή $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ένα διάνυσμα είτε και τα δύο.

Δηλαδή, στη γενική περίπτωση:

μελετάμε τις ιδιότητες συναρτήσεων (απεικονίσεων)

$\mathbb{R}^n \supset U \ni \bar{x} \mapsto \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, όπου $\bar{x} = (x_1, .., x_n)$ και $n, m \in \mathbb{N}$.

Ειδικές Περιπτώσεις:

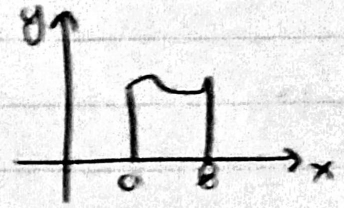
① Γνωρίζαμε (ελπίζω!) τις ιδιότητες τέτοιων συναρτήσεων όταν $\boxed{n=m=1}$ (βλ. ΑΠ Ι και ΙΙ), δηλαδή πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής (ανεξάρτητης) μεταβλητής.

αφορά τις τιμές της συνάρτησης

δηλαδή

$\mathbb{R} \supseteq U \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

«$\supseteq$» π.χ. $=[\alpha, \beta]$



② Πραγματικές συναρτήσεις «περισσότερων μεταβλητών», δηλαδή $\mathbb{R}^n \supset U \ni \bar{x} \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ m=1)$

π.χ. $n=2$, $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}$

όπου $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = U$

[Όταν έχουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$, συνήθως το περιγράφουμε ως $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (αλλά και $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$)]

Με την περίπτωση ② θα ασχοληθούμε πάρα πολύ γιατί με αυτήν μπορούμε να καταλάβουμε και άλλες περιπτώσεις.

③ Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής $(n=1,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2)$

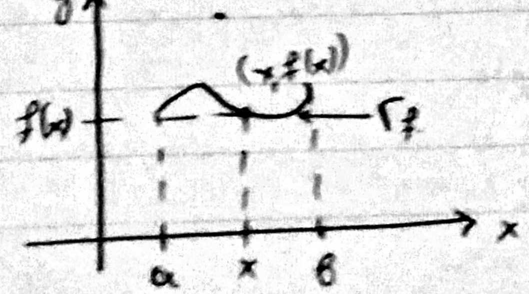
$$\mathbb{R} \supset U \ni t \mapsto \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Αν η $\bar{\gamma}$ είναι συνεχής (j) η $\bar{\gamma}$ είναι παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$

π.χ.

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με γράφημα

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [\alpha, \beta]\}$



Τότε: $\Gamma_f = \bar{\gamma}([a, b])$

όπου $\bar{\gamma}(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, $x \in [a, b]$

$\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ με εικόνα $\bar{\gamma}([a,b]) = \{\bar{\gamma}(x) = (x, f(x)) : x \in [a,b]\} = \Gamma_f$.

Άρα συγκρατάμε πως έχουμε δει ήδη καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ και η <u>παραμετρική καμπύλη</u> είναι μια συνάρτηση <u>μιας</u> μεταβλητής με τιμές διανύσματα, της οποίας η <u>εικόνα</u> λέγεται <u>καμπύλη</u> (πιο αυστηρά αργότερα)

(4) <u>Διανυσματικές συναρτήσεις με τιμές στον $\mathbb{R}^3$ και ορίσματα στον $\mathbb{R}^2$</u>, δηλ. $\mathbb{R}^2 \supset U \ni (u, v) \longmapsto \bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Υπό κάποιες συνθήκες στην $\bar{\Phi}$ και άρα και στο U αυτές οι συναρτήσεις είναι <u>παραμετρικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$</u>

(5) <u>Διανυσματικά πεδία</u>, όπου $\boxed{n = m}$